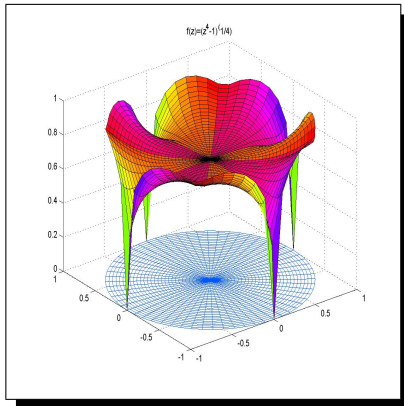
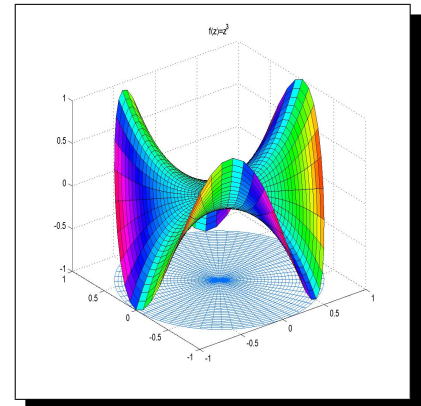


Suites et séries de fonctions Séries entières et de Fourier



Parcours MIP

**TD
Corrigés
M136**



Promo 2015-2016

|| Dieu a créé les nombres, le reste est l'oeuvre de l'homme.

|| L'enseignement est un habit tout fait et pas un habit sur mesure.

|| Si l'esprit d'un homme s'égare, faites-lui étudier les mathématiques car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer.

|| Pour l'enseignant il ne s'agit pas d'aimer ou de détester, il s'agit avant tout de ne pas se tromper. [André Lévy]

|| On n'enseigne pas ce que l'on sait ou ce que l'on croit savoir : on n'enseigne et on ne peut enseigner que ce que l'on est.

|| Quand une société ne peut pas enseigner, c'est que cette société ne peut pas s'enseigner. [Charles Péguy]

|| La science, c'est ce que le père enseigne à son fils. La technologie, c'est ce que le fils enseigne à son papa. [Michel Serres]

|| Une société qui n'aime pas ses enseignants est une société qui n'a pas compris le défi de la mondialisation de demain. [Valérie Pécresse]

|| Il y a des sciences bonnes dont l'existence est nécessaire et dont la culture est inutile. Telles sont les mathématiques. [Joseph Joubert]

|| Les mathématiques sont une gymnastique de l'esprit et une préparation à la philosophie. [Isocrate]

|| La musique est une mathématique sonore, la mathématique une musique silencieuse. [Edouard Herriot]

|| Dieu n'est pas l'éternité, il n'est pas l'infini, mais il est éternel et infini. Il n'est ni la durée ni l'espace ; mais il a existé de tout temps et sa présence est partout. [Isaac Newton]

|| La vie n'est belle qu'à étudier et à enseigner les mathématiques.

TABLE DES MATIÈRES

1	Suites et séries de fonctions	5
1.1	Suites de fonctions	5
1.2	Séries de fonctions	12
2	séries entières	25
2.1	Rayon de convergence	25
2.2	Développement en séries entières	30
2.3	Calcul de la somme d'une série entière	34
2.4	Méthode d'équation différentielle	37
3	Séries de Fourier	41
3.1	Développement en série de Fourier	41
3.2	Série de Fourier : calcul de somme	44

CHAPITRE

1

Suites et séries de fonctions

1.1 Suites de fonctions

Exercice 1.1.1

Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions sur des domaines convenables :

$$1. f_n(x) = \frac{2n |x|}{1 + n^2 x^2}$$

$$3. f_n(x) = n(e^{\frac{x}{n}} - 1)$$

$$5. f_n(x) = \frac{x^n}{1 + ax^n}$$

$$2. f_n(x) = \frac{1}{1 + nx}$$

$$4. f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$$

$$6. f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}.$$

Corrigé 1.1.1

1. Étude de $f_n(x) = \frac{2n |x|}{1 + n^2 x^2}$.

(a) **Convergence simple sur \mathbb{R} .** On a $\forall n \in \mathbb{N}$

Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$

Pour $x \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|2x|}{nx^2} = 0$.

Donc la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction f nulle sur \mathbb{R} définie par $f(x) = 0$.

(b) **Convergence uniforme sur \mathbb{R} .**

Pour $x = 1/n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n |x|}{1 + n^2 x^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + 1} = 1 \neq 0$, la convergence n'est donc pas uniforme sur \mathbb{R} .

Convergence uniforme sur $I =]-\infty, a] \cup [a, +\infty[$ pour $a > \frac{1}{n}$.

La fonction est paire il suffit de l'étudier sur $[0, +\infty[$. On a pour tout $x > 0$,

$$f'_n(x) = 2n \frac{1 + n^2 x^2 - 2n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2} = 2n \frac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2}.$$

x	0	$1/n$	a	$+\infty$
$f'_n(x)$	-	0	+	
f_n	0	\nearrow	\searrow	0

$\|f_n\|_\infty^I = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_n(a)| = \frac{2na}{1 + n^2 a^2}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty^I = 0$, ce qui montre la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ sur I .

2. Étude de $f_n(x) = \frac{1}{1 + nx}$.

(a) **Convergence simple** sur $[0, 1]$. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n(0) = 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 1$.

$$\forall x \in]0, 1], \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

Donc la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction g définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0 \\ 0, & \text{si } x \in]0, 1] \end{cases}$$

(b) **Convergence uniforme** sur $[0, 1]$. Puisque On a $\forall n \in \mathbb{N}$, les fonctions f_n sont continues sur $[0, 1]$ et la fonction limite f est discontinue sur $[0, 1]$ alors la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.

3. $f_n(x) = n(e^{\frac{x}{n}} - 1)$.

(a) **Convergence simple** sur \mathbb{R} . Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(e^{\frac{x}{n}} - 1) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ x \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{x/n} - 1}{x/n}, & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \\ &= f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ x, & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(b) **Convergence uniforme** sur \mathbb{R} .

Pour la suite $x_n = n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |n(e^1 - 2)| = +\infty \neq 0$. Donc la convergence n'est pas uniforme sur \mathbb{R} .

(c) **Convergence uniforme** sur $[0, 1]$. Pour $x \in [0, 1]$, soit

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = |n(e^{x/n} - 1) - x|.$$

On peut remarquer que $g_n(x) = n(e^{x/n} - 1) - x$ sur $[0, 1]$ (Il suffit d'étudier la fonction : $x \rightarrow n(e^{x/n} - 1) - x$ sur $[0, 1]$).

$\forall x \in]0, 1[, g'_n(x) = e^{x/n} - 1 \geq 0$, donc g_n est croissante et son maximum de g_n est :

$$\sup_{[0,1]} g_n(x) = g_n(1) = n(e^{1/n} - 1) - 1.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{[0,1]} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n(e^{1/n} - 1) - 1) = 0$, la convergence sur $[0, 1]$ est uniforme.

4. $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$, $\alpha > 0$.

(a) **Convergence simple.**

Pour $x > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha x}{e^{nx}} = 0$, pour $x = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$

et pour $x < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha x e^{-nx} = +\infty$.

Donc la suite converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction f nulle ($f(x) = 0$).

(b) **Convergence uniforme sur \mathbb{R}^+ .**

On étudie la fonction $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = |n^\alpha x e^{-nx}| = n^\alpha x e^{-nx}$.

On a $f'_n(x) = n^\alpha e^{-nx} - n^{\alpha+1} x e^{-nx} = (1 - nx)n^\alpha e^{-nx}$. et

$$f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow (1 - nx)n^\alpha e^{-nx} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{n}.$$

Donc la dérivée est strictement positive pour $x < \frac{1}{n}$, nulle pour $x = \frac{1}{n}$ et strictement négative pour $x > \frac{1}{n}$.

Le maximum de g_n est atteint en $x_n = \frac{1}{n}$ et ce maximum est $f_n(x_n) = \frac{n^{\alpha-1}}{e}$. D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^+} g_n(x) = \frac{n^{\alpha-1}}{e} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } \alpha > 1 \\ \frac{1}{e}, & \text{si } \alpha = 1 \\ 0, & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur \mathbb{R}^+ vers la fonction nulle.

5. $f_n(x) = \frac{x^n}{1 + ax^n}$.

(a) **Convergence simple sur \mathbb{R} .** Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & \text{si } |x| > 1 \\ 0, & \text{si } |x| < 1 \\ \frac{1}{1+a}, & \text{si } x = 1 \\ \text{pas de limite,} & \text{si } x = -1 \end{cases}.$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ converge donc sur $] -1, +\infty[$ vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & \text{si } |x| > 1 \\ 0, & \text{si } |x| < 1 \\ \frac{1}{1+a}, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- (b) **convergence uniforme** $] -1, +\infty[$. Comme les fonctions f_n , pour $n \geq 0$, sont continues sur $] -1, +\infty[$ et la fonction limite simple est discontinue sur $] -1, +\infty[$ alors la convergence n'est pas uniforme sur $] -1, +\infty[$.

6. $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$, $f_n(0) = 0$.

- (a) **Convergence simple**.

On a pour tout x de \mathbb{R}^* , $|\frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}| \leq \frac{1}{n\sqrt{x}}$ et $0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\sqrt{x}} = 0$ donc la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur vers la fonction f nulle \mathbb{R}^+ (car $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$).

- (b) **Convergence uniforme sur \mathbb{R}** .

Remarquer qu'il est difficile d'étudier la fonction $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = |\frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}|$ et si on remplace par n'importe quelle suite x_n la limite de la suite $g_n(x_n)$ est toujours nulle. On procède donc d'une autre façon. Remarquons que $\frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{n}} h(nx)$ avec $h(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ et $g(0) = 0$. Si on arrive à prouver que la fonction h est bornée par une constante M sur \mathbb{R} la convergence sera donc uniforme sur \mathbb{R} . En effet dans ce cas on aura pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

$$0 \leq |f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{\mathbb{R}} |h(x)| = \frac{M}{n},$$

qui tend vers 0 quand n vers $+\infty$.

Prouvons que h est bornée : d'abord le problème ne se pose pas sur $[1, +\infty[$ puisque h est continue $0 \leq |f_n(x)| \leq \frac{1}{n\sqrt{x}} \leq \frac{1}{n}$ et

$$0 \leq \sup_{x \geq 1} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n\sqrt{x}} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Sur $]0, 1]$ h est continue et prolongeable par continuité en 0 car

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \cdot \frac{\sin(x)}{x} = 0.$$

Donc h est continue sur $]0, 1]$ et comme cet intervalle est compact (fermé borné) la fonction h y est donc bornée, et finalement h est bornée sur \mathbb{R}^+ .

Exercice 1.1.2

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ définies par $f_n(x) = e^{-nx^2} \cdot \sin(nx) + \sqrt{1-x^2}$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur $[-1, 1]$ vers une fonction que l'on déterminera.
2. Montrer que, pour tout $a > 0$, la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f sur $[a, 1]$.
3. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Corrigé 1.1.2

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ définies par : $f_n(x) = e^{-nx^2} \cdot \sin(nx) + \sqrt{1-x^2}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f est définie pour $x \in [-1, 1]$, donc le domaine définition de f_n est $D_{f_n} = [-1, 1]$. Pour tout $x \in [-1, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(e^{-nx^2} \cdot \sin(nx) + \sqrt{1-x^2} \right) = \sqrt{1-x^2},$$

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-nx^2} = 0$ et $n \rightarrow \sin(nx)$ est bornée.

Donc la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur $[-1, 1]$ vers une fonction f définie par

$$\forall x \in [-1, 1], \quad f(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

2. Montrons que, pour tout $a > 0$, la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f sur $[a, 1]$.
Pour $x \in [a, 1]$, $x \geq a$ et comme $|\sin(nx)| \leq 1$, alors

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = |e^{-nx^2} \cdot \sin(nx)| \leq e^{-na^2},$$

donc $0 \leq \sup_{x \in [a, 1]} g_n(x) \leq e^{-na^2}$, et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-na^2} = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [a, 1]} g_n(x) = 0$,

ceci montre que la convergence est uniforme sur $[a, 1]$.

3. Montrons que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Pour $x_n = \frac{1}{n}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} |e^{-1/n} \cdot \sin(1)| = \sin(1) \neq 0$, et donc la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 1.1.3

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ définies par :

$$f_n(x) = \frac{ne^x + xe^{-x}}{x+n}, x \geq 0.$$

1. Étudier la convergence simple et uniforme de la suites $(f_n)_{n \geq 0}$ sur $[0, 1]$.
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (x^3 + 1)f_n(x)dx$.

Corrigé 1.1.3

1. Étude de la convergence simple et uniforme de la suites $(f_n)_{n \geq 0}$ sur $[0, 1]$.

(a) Convergence simple sur $[0, 1]$. Pour tout $x \in [0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{ne^x + xe^{-x}}{x+n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{ne^x}{n} = e^x,$$

Donc la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f définie par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = e^x.$$

Convergence uniforme sur $[0, 1]$.

$$\text{Pour } x \in [0, 1], g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{ne^x + xe^{-x}}{x+n} - e^x \right| = \left| \frac{xe^{-x} - xe^x}{x+n} \right|.$$

$$\text{Pour } x \in [0, 1], g_n(x) \leq \frac{xe^{-x} + xe^x}{x+n} \leq \frac{1+e}{n}, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0,1]} g_n(x) = 0.$$

Ceci montre que la convergence est uniforme sur $[0, 1]$.

2. Calcul de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (x^3 + 1)f_n(x)dx$. La convergence étant uniforme sur $[0, 1]$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (x^3 + 1)f_n(x)dx = \int_0^1 (x^3 + 1) \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 (x^3 + 1)e^x dx,$$

et par intégration par partie on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (x^3 + 1)f_n(x)dx = \int_0^1 (x^3 + 1)e^x dx = 5 - e.$$

Exercice 1.1.4

Etude de convergence Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$ pour $x \in [0, 1]$.

1. Trouver la limite simple des fonctions $(f_n)_n$.
2. Pour quelle valeurs de α la convergence est uniforme ?

Corrigé 1.1.4

1. Pour $x = 0$ ou $x = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ et pour $x \in]0, 1[$, on a

$$\ln(f_n(x)) = \alpha \ln(n) + \ln(x) + n \ln((1-x)) = \ln(n) \left[\alpha + \frac{\ln(x)}{\ln(n)} + \frac{n}{\ln(n)} \ln((1-x)) \right]$$

qui tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$. Par suite la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle.

2. Pour étudier la convergence uniforme on considère la fonction

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = n^\alpha x(1-x)^n$$

On a $g'_n(x) = n^\alpha(1-x)^{n-1}((n+1)x - 1)$ et donc

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = \frac{n^\alpha}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \sim e \cdot n^{\alpha-1}$$

qui converge pour $\alpha < 1$. Il y a donc convergence uniforme si et seulement si $\alpha < 1$.

Exercice 1.1.5

Soit la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n(x) = \frac{x}{n^2} e^{-x/n}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur \mathbb{R}^+ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Comparer $\int_0^{+\infty} (\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x))dx$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} u_n(x)dx$.
3. Conclure.

Corrigé 1.1.5 1. Montrons que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur \mathbb{R}^+ vers une fonction f que l'on déterminera.

(a) Convergence simple sur \mathbb{R}^+ . On a pour tout $x \geq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n^2} e^{-x/n} = 0,$$

car pour $u_n(0) = 0$ et pour $\neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n^2} e^{-x/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \frac{x/n}{e^{x/n}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

La suite converge simplement sur \mathbb{R}^+ vers la fonction nulle u .

(b) Convergence uniforme sur \mathbb{R}^+ . On a pour tout $x > 0$, $u'_n(x) = \frac{e^{-x/n}}{n^2} \left(1 - \frac{x}{n}\right)$,

x	0	$1/n$	$+\infty$
$u'_n(x)$	+	0	-
u_n	0	$1/ne$	0

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \geq 0} |u_n(x) - u(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{ne} = 0$, d'où la convergence uniforme de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ sur \mathbb{R}^+ .

2. Comparer $\int_0^{+\infty} (\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x)) dx$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} u_n(x) dx$.

On a $\int_0^{+\infty} (\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x)) dx = \int_0^{+\infty} u(x) dx = 0$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x/n}}{n^2} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \left(-n [x e^{-x/n}]_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} e^{-x/n} dx \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \left(n^2 [-e^{-x/n}]_0^{+\infty} \right) = 1.$$

3. Conclusion. On a donc

$\int_0^{+\infty} (\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x)) dx \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} u_n(x) dx$ et pourtant la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions continue sur \mathbb{R}^+ et converge uniformément sur \mathbb{R}^+ . Ceci est dû au fait que le théorème d'inversion de la limite et l'intégrale n'est pas valable pour les intégrales généralisées.

Exercice 1.1.6

soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par :

$$\begin{cases} n^2 x(1 - nx), & \text{pour } x \in [0, 1/n] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Étudier la limite simple de la suite $(f_n)_n$.

2. Calculer : $\int_0^1 f_n(t) dt$. Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction $(f_n)_n$?

3. Étudier la convergence uniforme sur $[a, 1]$ avec $a > 0$.

Corrigé 1.1.6

1. Pour $x \in]0, 1]$, il existe n_0 tel que $\frac{1}{n_0} < x$, alors pour tout $n \geq n_0$, $f_n(x) = 0 \rightarrow 0$.

Pour alors $x = 0$, $f_n(x) = 0$.

Donc la suite de fonction $(f_n)_n$ converge simplement vers nulle f sur $[0, 1]$ ($f(x) = 0$).

2. On a

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^{1/n} n^2 x(1 - nx) dx = n^2 \left[\frac{x^2}{2} - n \frac{x^3}{3} \right]_0^{1/n} = n^2 \left(\frac{1}{2n^2} - \frac{n}{3n^3} \right) = \frac{1}{6}.$$

S'il y avait convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_n$ on aurait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Ce qui n'est pas le cas, donc il n'y a pas de convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_n$ vers nulle f sur $[0, 1]$.

3. Sur $[a, 1]$ la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle g sur $[a, 1]$, pour tout $n > \frac{1}{a} \Leftrightarrow a > \frac{1}{n}$, et pour tout $x \in [a, 1]$ donc $f_n(x) = 0$. D'où

$$\forall x \in [a, 1], \quad |f_n(x) - g(x)| = |f_n(x)| = n^2 x(1 - nx) = 0.$$

Donc il y a convergence uniforme sur $[a, 1]$.

1.2 Séries de fonctions**Exercice 1.2.1**

Soit la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_n(x) = (-1)^n \ln \left(1 + \frac{x}{n(1+x)} \right)$$

pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ .
2. Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}^+ .
3. La convergence est-elle normale sur \mathbb{R}^+ ?

Corrigé 1.2.1

1. Montrons que la série $\sum u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ .

La série $\sum u_n(x)$ est alternée. De plus on a pour tout $x \geq 0$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n(x)| = 0 \\ \forall n \geq 1 \quad |u_{n+1}(x)| \leq |u_n(x)| \end{cases}$$

Donc d'après le critère d'Abel des séries alternées la série $\sum u_n(x)$ est convergente vers une fonction

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

2. Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}^+ .

Pour montrer la convergence uniforme sur \mathbb{R}^+ on calcule

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |S_n - S(x)|,$$

$$\text{où } S(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x).$$

Le critère des séries alternées nous donne même la majoration suivante du reste de la série

$$|S_n - S(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{x}{(n+1)(1+x)} \leq \frac{1}{n+1}$$

car $\ln(t+1) \leq t$ pour $t > -1$ et $x \leq n+x$.

Donc $0 \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |S_n - S(x)| \leq \frac{1}{n+1}$, et par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |S_n - S(x)| = 0$. C'est bien que la série converge uniformément sur \mathbb{R}^+ .

3. La convergence est-elle normale sur \mathbb{R}^+ ?

On a $\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |u_n(x)| \geq |u_n(1)| = \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \sim \frac{1}{2n}$ au voisinage de l'infini. Donc il n'y a pas convergence normale puisque $\sum \frac{1}{2n}$ est divergente.

Exercice 1.2.2

Soit la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2(1+x)}$.

1. Étude de la série $\sum u_n$.

(a) Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur un domaine I que l'on déterminera.

(b) Étudier la convergence uniforme sur ce domaine I .

2. Même questions pour la série $\sum v_n$, où $u_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n(1+x)}$.

Corrigé 1.2.2 1. Étude de la série $\sum \frac{e^{-nx}}{n^2(1+x)}$.

(a) Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur un domaine I que l'on déterminera.
On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = e^{-x} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|(n+1)^2(1+x)|}{|n^2(1+x)|} = e^{-x}.$$

D'après la règle de d'Alebert la série converge si $e^{-x} < 1$ et diverge si $e^{-x} > 1$ donc la série converge si $x > 0$ et diverge si $x < 0$.

Pour $x = 0$ la série devient $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ qui converge d'après la règle d'Abel.

Finalement la série converge simplement si et seulement si $x \geq 0$ et donc $I = [0, +\infty[$.

(b) Étudier la convergence uniforme sur ce domaine I .

On a $\forall x \geq 0 \quad |u_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann). Donc la série $\sum u_n$ est normalement convergente sur \mathbb{R}^+ donc uniformément convergente sur \mathbb{R}^+ .

2. Même questions pour la série $\sum v_n$, où $u_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n(1+x)}$.

De la même façon on montre que la série converge simplement sur \mathbb{R}^+ .

Dans ce cas on ne peut pas appliquer le résultat de la convergence normale puisque

$\forall x \geq 0 \quad |v_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ est diverge (série de Riemann).

On applique donc le résultat du reste appliqué aux séries alternées convergentes. En effet on a

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \right| \leq |v_{n+1}| = \left| \frac{e^{-nx}}{n(1+x)} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Donc $0 \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |R_n(x)| \leq \frac{1}{n}$. En passant à la limite pour n tendant vers l'infini on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |R_n(x)| = 0,$$

ce qui prouve donc que la série converge uniformément sur \mathbb{R}^+ .

Exercice 1.2.3

Soit la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n(x) = \frac{1}{n^2 + n^3 x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers une fonction f .

2. Étudier la dérivabilité de f sur \mathbb{R} .

Corrigé 1.2.3

1. Comme pour tout x de \mathbb{R} , $|u_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ alors la série converge normalement sur \mathbb{R} d'où la convergence uniforme sur \mathbb{R} .

2. Étudier la dérivabilité de f sur \mathbb{R} .

$$\text{On a pour tout } x > 0, u'_n(x) = \frac{-2n^3 x}{(n^2 + n^3 x^2)^2} = \frac{-2x}{n(1 + nx)^2} \text{ et } u''_n(x) = \frac{2(3nx^2 - 1)}{n((1 + nx)^3)}$$

On vérifie après étude de la fonction u'_n que $|u'_n(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8n^{3/2}}$ et comme $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ la série $\sum u'_n$ converge normalement sur \mathbb{R} d'où la convergence uniforme sur \mathbb{R} et comme les fonctions $x \rightarrow u'_n(x)$ sont continues sur \mathbb{R} alors f est dérivable et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2x}{n(1 + nx)^2}.$$

Exercice 1.2.4

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \sin(nx)}$.

1. Montrer que f est continue sur son domaine de définition.
2. f est-elle dérivable sur son domaine de définition ?

Corrigé 1.2.4 1. Montrer que f est continue sur son domaine de définition.

Soit pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f_n(x) = \frac{1}{n^2 + \sin(nx)}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin(nx) \leq 1$ et $n^2 \geq 4$ donc $0 < -1 + n^2 \leq n^2 + \sin(nx) \leq n^2 + 3$, le domaine de définition de f_n est donc \mathbb{R} . De plus $\frac{1}{n^2 + \sin(nx)} \leq \frac{1}{n^2 + 3}$ et comme $\sum \frac{1}{n^2 + 3}$ est convergente série de Riemann ($\frac{1}{n^2 + 3} \sim \frac{1}{n^2} (+\infty)$) alors la série $\sum \frac{1}{n^2 + \sin(nx)}$ est normalement convergente sur \mathbb{R} d'où la convergence uniforme sur \mathbb{R} et comme pour tout $n \geq 2$ la fonction $x \rightarrow f_n(x)$ alors la fonction f est continue sur \mathbb{R} .

2. Dérivabilité de f sur son domaine de définition. On a pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f'_n(x) = \frac{-n \cos(nx)}{(n^2 + \sin(nx))^2} \text{ et } |f'_n(x)| \leq \frac{1}{n^3}.$$

Résumé :

- (*) La série $\sum f'_n$ est normalement convergente sur \mathbb{R} .
- (*) $\forall n \geq 2$ la fonction $x \rightarrow f'_n(x)$ est continue sur \mathbb{R} .

Donc la série $\sum f'_n$ converge vers une fonction g continue sur \mathbb{R} définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-n \cos(nx)}{(n^2 + \sin(nx))^2} \text{ de plus on a } \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = g(x).$$

Donc f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Exercice 1.2.5

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ définies par :

$$f_n(x) = x^{n+1} \ln(x), \text{ si } x > 0, \text{ et } f_n(0) = 0;$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers une fonction que l'on déterminera.
2. Calculer, pour tout n , le maximum de la fonction $x \rightarrow |f_n(x)|$ et déduire la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$.
3. (a) Montrer que la série $\sum f_n$ est simplement convergente vers une fonction que l'on explicitera.
(b) La convergence de la série $\sum f_n$ est-elle uniforme ?
4. (a) Montrer que la série $\sum (-1)^n f_n$ est simplement convergente.
(b) Montrer que la série $\sum (-1)^n f_n$ est uniformément convergente (on pourra étudier le reste).

Corrigé 1.2.5 1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers une fonction que l'on déterminera.

Pour $x \geq 0$;

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ 0, & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ +\infty, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Donc $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction f définie par : $\forall x \in [0, 1], f(x) = 0$.

2. Calculer, pour tout n , le maximum de la fonction $x \rightarrow |f_n(x)|$ et déduire la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$.

Etude de la fonction f_n . On a pour tout $x \in]0, 1[$, $f'_n(x) = (n+1)x^n \ln(x) + x^n = x^n((n+1)\ln(x) + 1)$.

$$f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1/(n+1)}.$$

x	0	$(e^{-1/(n+1)})$	1
$f'_n(x)$	-	$(-1/e(n+1))$	+
f_n	0	$\searrow -1/e(n+1) \nearrow$	0

le maximum de la fonction $x \rightarrow |f_n(x)|$ est donc $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = \frac{1}{e(n+1)}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, d'où la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ sur $[0, 1]$.

3. (a) Montrer que la série $\sum (-1)^n f_n$ est simplement convergente.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = |x|$. D'après le critère de d'Alembert la série est simplement convergente pour $|x| < 1$ et comme la série converge en 0 alors son intervalle de convergence est $[0, 1]$. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} \ln(x)$ alors

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ \frac{\ln(x)}{1-x}, & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- (b) Or $\lim_{n \rightarrow 1} f(x) = 1 \neq f(1)$ donc la fonction limite simple est discontinue et les f_n sont continues la convergence n'est pas uniforme.

4. (a) Montrer que la série $\sum (-1)^n f_n$ est uniformément convergente (on pourra étudier le reste).

La série $\sum f_n(x)$ est alternée. De plus on a pour tout $x \geq 0$

$$\begin{cases} \forall x \in [0, 1], \lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x)| = 0 \\ \forall n \geq 1, |f_{n+1}(x)| \leq |f_n(x)| \end{cases}$$

car

$$x \leq 1 \Leftrightarrow x^{n+1} \leq x^n \Leftrightarrow x^{n+1} |\ln(x)| \leq x^n |\ln(x)|$$

.

Donc d'après le critère d'Abel des séries alternées la série $\sum f_n(x)$ est convergente vers une fonction

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

(b) Montrer que la série $\sum (-1)^n f_n$ est uniformément convergente (on pourra étudier le reste).

Pour montrer la convergence uniforme sur \mathbb{R}^+ on calcule

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |S_n - S(x)|$$

$$, \text{ où } S(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x).$$

Le critère des séries alternées nous donne même la majoration suivante du reste de la série

$$|S_n - S(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq |f_{n+1}(x)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{e(n+2)},$$

d'après la question 2).

Donc $0 \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |S_n - S(x)| \leq \frac{1}{e(n+2)}$, et par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |S_n - S(x)| = 0$. C'est bien que la série converge uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 1.2.6

On considère la série de fonctions de terme général $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$.

1. Étudier la convergence simple et uniforme \mathbb{R} de cette série.
2. Étudier la convergence simple et uniforme sur \mathbb{R} de la série de terme général f'_n .
3. Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est dérivable sur \mathbb{R} .

Corrigé 1.2.6

1. Étude de la convergence simple et uniforme \mathbb{R} de la série.

Pour tout x de \mathbb{R} , $|f_n(x)| = \left| \frac{\sin(nx)}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$, et la série de terme général $\frac{1}{n^3}$ est convergente

(série de Riemann), donc la série de terme général $\frac{\sin(nx)}{n^3}$ est normalement convergente et donc

la convergence est simple et uniforme sur \mathbb{R} vers une fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

2. Étude de la convergence simple et uniforme sur \mathbb{R} de la série de terme général f'_n .

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$, et la série de terme général $\frac{\cos(nx)}{n^2}$ est normalement convergente et donc la convergence est simple et uniforme sur \mathbb{R} (même technique dans la première question).

3. Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est dérivable sur \mathbb{R} .

D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions la fonction en question est dérivable sur \mathbb{R} et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

Exercice 1.2.7

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(nx)}$.

1. Déterminer l'ensemble D_f de définition de f .
2. Montrer que f est continue sur $]1, +\infty[$.
3. Calculer les limites de f en $+\infty$ et 1.
4. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]1, +\infty[$ et dresser son tableau de variation.

Corrigé 1.2.7

1. Détermination l'ensemble D_f de définition de f .

Pour n entier naturel non nul, on note f_n la fonction $x \rightarrow \frac{(-1)^n}{\ln(nx)}$. Pour tout réel x , $f(x)$ existe si et seulement si chaque f_n , $n \in \mathbb{N}^*$, existe et la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x)$ existe si et seulement si $x > 0$ et $x \neq \frac{1}{n}$.

Soit donc $x \in D =]0, +\infty[\setminus \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$. Pour $n > 1/x$, on a $\ln(nx) > 0$. On en déduit que la suite $\left(\frac{1}{\ln(nx)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive et décroissante à partir d'un certain rang et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées et donc $f(x)$ existe.

Le domaine de définition de f est $D =]0, +\infty[\setminus \{1/n; n \in \mathbb{N}^*\}$.

2. Continuité de f sur $]1, +\infty[$.

La série est alternée et convergente le reste $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\ln(kx)}$ est donc majorée par la valeur absolue du premier terme de ce reste.

Ainsi $\forall x > 1, |R_n(x)| \leq \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(x(n+1))} \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x > 1} |R_n(x)| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln n + 1} = 0$, d'où la convergence uniforme de la série sur $]1, +\infty[$ et donc la continuité de f sur $]1, +\infty[$.

3. Calcul de la limite de f en $+\infty$.

Soit $x > 1$. Donc $f(x)$ existe. Pour tout entier naturel non nul n , $\ln(nx) > 0$. On en déduit que la suite $\left(\frac{1}{\ln(nx)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Cette série est alternée et convergente le reste $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\ln(kx)}$ est donc majorée par la valeur absolue du premier terme de ce reste.

D'après la majoration du reste d'une série alternée convergente

$$\forall x > 1, |f(x)| = |R_0(x)| \leq \frac{(-1)^1}{\ln(x)} \leq \frac{1}{\ln(x)},$$

et en particulier $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. On peut noter de plus que pour $x > 1$, $f(x)$ est du signe du premier terme de la série à savoir $\frac{1}{\ln x}$, donc $\forall x > 1, f(x) > 0$.

Calcul de la limite de f en 1.

Quand x tend vers 1 par valeurs supérieures, $f_n(x)$ tend vers $\alpha_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$. Puisque la série de fonctions de terme général $f_n, n > 1$, converge uniformément vers sa somme sur $]1, +\infty[$, le théorème d'interversion des limites permet d'affirmer que la série numérique de terme général $\alpha_n, n > 2$ converge et que la fonction $x \rightarrow f(x) + \frac{1}{\ln(x)} = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$ tend vers le réel $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$,

donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{1}{\ln(x)} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \right) = -\infty$ puisque la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ converge.

4. Montrons que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]1, +\infty[$ et dresser son tableau de variation.

La série de fonctions de terme général $f_n, n > 1$, converge simplement vers la fonction f sur $]1, +\infty[$. De plus chaque fonction f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $]1, +\infty[$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 1$,

$$f'_n(x) = \frac{(-1)^n}{x \ln^2(nx)}. \text{ Le reste de la série } \sum_{n=2}^{+\infty} f'_n(x) \text{ est } |R'_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x \ln^2(kx)} \right| \leq \frac{1}{\ln^2(n+1)}$$

et il vérifie

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x > 1} |R'_n(x)| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln^2(n+1)} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x > 1} |R'_n(x)| = 0.$$

Ainsi, la série de fonctions de terme général $f'_n, n > 1$, converge uniformément sur $]1, +\infty[$.

En résumé,

- La série de fonctions de terme général $f_n, n > 1$, converge simplement vers f sur $]1, +\infty[$,
- Chaque fonction $f_n, n > 1$, est de classe \mathcal{C}^1 sur $]1, +\infty[$.
- La série de fonctions de terme général f'_n converge uniformément sur $]1, +\infty[$.

D'après un corollaire du théorème de dérivation terme à terme, f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]1, +\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. On a

$$\forall x > 1, f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x \ln^2(nx)}.$$

Pour $x > 1$, puisque la série de somme $f'(x)$ est alternée, $f'(x)$ est du signe du premier terme de la somme à savoir $-\frac{1}{x \ln^2(x)}$. Par suite, $\forall x > 1, f'(x) < 0$ et f est donc strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

Exercice 1.2.8

Fonction zeta On appelle fonction ζ de Riemann la fonction de la variable $s \in \mathbb{R}$ définie par la formule

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

1. Montrer que ζ est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur $]1, +\infty[$
2. Etudier la monotonie et la convexité de la fonction ζ .
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x)$
4. En exploitant l'inégalité de Cauchy-Schwartz établir que la fonction $x \rightarrow \ln(\zeta(x))$ est convexe.

Corrigé 1.2.8

1. ζ est bien définie sur $]1, +\infty[$ en tant que série de Riemann. La fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x} \text{ est de } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]1, +\infty[\text{ et } f_n^{(p)}(x) = \frac{(-\ln(n))^p}{n^x}, \text{ pour tout } x > 1.$$

$$\text{Pour tout } a > 1 \text{ on a sur }]a, +\infty[, \left| f_n^{(p)}(x) \right| \leq \frac{(\ln(n))^p}{n^a} \text{ donc } \sup_{]a, +\infty[} \left| f_n^{(p)}(x) \right| \leq \frac{(\ln(n))^p}{n^a}.$$

Pour $\rho \in]1, a[$, $n^\rho \cdot \sup_{]1, +\infty[} \left| f_n^{(p)} \right|$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, donc $\sum_{]1, +\infty[} \sup_{]1, +\infty[} \left| f_n^{(p)} \right|$ converge d'où la convergence normale de $\sum f_n^{(p)}$.

Il en découle $\sum f_n^{(p)}$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ et $\sum f_n^p$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $]1, +\infty[$. Donc la somme $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]1, +\infty[$.

2. On a pour tout $x > 1$, $\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln(n)}{n^x} \leq 0$, donc ζ est décroissante.

$$\text{De plus } \zeta''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln(n))^2}{n^x} \geq 0 \text{ donc } \zeta \text{ est convexe.}$$

3. $\sum f_n$ converge uniformément sur $]2, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$ si $n = 1$ et 0 sinon donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1.$$

4. Le signe de $\ln(\zeta''(x))$ set celui de $\zeta(x)\zeta''(x) - (\zeta'(x))^2$. Or $\sum_{n=1}^N \frac{-\ln(n)}{n^x} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{x/2}} \cdot \frac{-\ln(n)}{n^{x/2}}$ et l'inégalité Cauchy-Schwartz donne

$$\left(\sum_{n=1}^N \frac{-\ln(n)}{n^x} \right)^2 \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} \cdot \sum_{n=1}^N \frac{(\ln(n))^2}{n^x}$$

Donc pour N tendant vers l'infini, $(\zeta'(x))^2 \leq \zeta(x)\zeta''(x)$.

Exercice 1.2.9

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \frac{\sin(nx)}{n}$$

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, 1[$.
3. Calculer $f'(x)$ et en déduire que $f(x) = \arctan\left(\frac{x \sin(x)}{1 - x \cos(x)}\right)$.

Corrigé 1.2.9

1. Pour $x \in] -1, 1[$ et n entier naturel non nul, posons $f_n(x) = x^n \frac{\sin(nx)}{n}$.

Soit $x \in] -1, 1[$. Pour n entier naturel non nul, $|f_n(x)| \leq |x|^n$. Or, la série géométrique de terme général $|x|^n$, $n > 1$, est convergente et donc la série numérique de terme général $f_n(x)$ est absolument convergente et en particulier simplement convergente sur $] -1, 1[$. On en déduit que $f(x)$ existe pour $x \in] -1, 1[$. Donc $D_f =] -1, 1[$.

2. Soit $a \in]0, 1[$. Chaque f_n , $n \geq 1$, est de classe \mathcal{C}^1 sur $[-a, a]$ et pour $x \in [-a, a]$,

$$f'_n(x) = x^{n-1} \sin(nx) + x^n \cos(nx).$$

Pour $x \in [-a, a]$ et $n \geq 1$,

$$|f'_n(x)| \leq a^{n-1} + a^n \leq 2a^{n-1}.$$

Puisque la série numérique de terme général $2a^{n-1}$, $n > 1$, converge, la série de fonctions de terme général f'_n , $n \geq 1$, est normalement et donc uniformément sur $[-a, a]$.

En résumé

- (*) la série de fonctions de terme général f_n , $n \geq 1$, converge simplement vers f sur $[-a, a]$,
- (*) chaque fonction f_n , $n \geq 1$, est de classe \mathcal{C}^1 sur $[-a, a]$,
- (*) la série de fonctions de terme général f'_n converge uniformément sur $[-a, a]$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[-a, a]$ pour tout réel a de $]0, 1[$ et donc sur $] -1, 1[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme.

$$\forall x \in] -1, 1[, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} \sin(nx) + x^n \cos(nx).$$

3. Pour $x \in] -1, 1[$;

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} \sin(nx) + x^n \cos(nx) = \operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} e^{inx}\right) + \operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n e^{inx}\right)$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} \sin(nx) + x^n \cos(nx) = \operatorname{Im} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} e^{inx} \right) + \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n e^{inx} \right) \\
&= \operatorname{Im} \left(\frac{e^{ix}}{1 - xe^{ix}} \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{xe^{ix}}{1 - xe^{ix}} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{e^{ix}(1 - xe^{ix})}{x^2 - 2x \cos(x) + 1} \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{xe^{ix}(1 - xe^{ix})}{x^2 - 2x \cos(x) + 1} \right) \\
&= \frac{\sin(x) + x \cos(x) - x^2}{x^2 - 2x \cos(x) + 1}
\end{aligned}$$

Comme $\forall x \in]-1, 1[$;

$$\left(\frac{x \sin(x)}{1 - x \cos(x)} \right)' = \frac{\sin(x) + x \cos(x) - x^2}{(1 - x \cos(x))^2}$$

donc

$$\left(\arctan \left(\frac{x \sin(x)}{1 - x \cos(x)} \right) \right)' = \frac{\sin(x) + x \cos(x) - x^2}{x^2 - 2x \cos(x) + 1} = f'(x).$$

Finalement pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \arctan(0) + \arctan \left(\frac{x \sin(x)}{1 - x \cos(x)} \right) = \arctan \left(\frac{x \sin(x)}{1 - x \cos(x)} \right).$$

CHAPITRE

2

Séries entières

2.1 Rayon de convergence

Détermination du rayon de convergence

Si les règles de Cauchy et de d'Alembert ne marchent pas on peut utiliser la remarque suivante :

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R .

1. Si l'on veut montrer que $R \geq \rho$, $\rho \in \mathbb{R}^+$, on peut
 - (a) essayer de trouver un z_0 tel que $|z_0| = \rho$ et $\sum a_n z_0^n$ **converge**.
 - (b) essayer de trouver un z_0 tel que $|z_0| = \rho$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n z_0^n = 0$.
 - (c) prouver que pour tout $r \in [0, \rho[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n r^n = 0$, ou $\sum a_n r^n$ **converge**.
2. Si l'on veut montrer que $R \leq \rho$, $\rho \in \mathbb{R}^+$, on peut
 - (a) essayer de trouver un z_0 tel que $|z_0| = \rho$ et $\sum a_n z_0^n$ **diverge**.
 - (b) essayer de trouver un z_0 tel que $|z_0| = \rho$ et la suite $\left(a_n z_0^n\right)_n$ **ne tend pas vers 0**.
 - (c) prouver que pour tout $r \in]\rho, +\infty[$, la suite $\left(a_n r^n\right)_n$ **ne tend pas vers 0**, ou $\sum a_n r^n$ **diverge**.

Exercice 2.1.1

Calculer le rayon de convergence des séries entières de termes généraux :

$$1. u_n(z) = \frac{n^2 + 1}{3^n} z^n,$$

$$2. u_n(z) = \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$$

$$3. u_n(z) = \frac{\ln(n)}{n^2} z^{2n}.$$

$$4. ((n+1)^{1/n+1} - n^{1/n}) z^n$$

$$5. u_n(z) = \frac{n^n}{n!} z^{3n},$$

$$6. u_n(z) = e^{-n^2} z^n,$$

$$7. u_n(z) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n,$$

$$8. u_n(z) = \frac{1}{n} \sin(2n\theta) z^n$$

$$9. u_n(z) = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n.$$

$$10. u_n(z) = 8^{-n} z^{5n},$$

Corrigé 2.1.1

$$1. u_n(z) = \frac{n^2 + 1}{3^n} z^n, a_n = \frac{n^2 + 1}{3^n}. \text{ On a } R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{n^2 + 1}{(n+1)^2 + 1} = 3.$$

$$2. u_n(z) = \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n, a_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3}. \text{ Pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ on a}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3(n+1))!}{((n+1)!)^3} \cdot \frac{(n!)^3}{(3n)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(3(n+1))!}{(3n)!}\right) \cdot \left(\frac{(n!)}{(n+1)!}\right)^3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2} = 27,$$

donc $R = \frac{1}{27}$.

$$3. \sum \frac{\ln(n)}{n^2} z^{2n}. \text{ Si } |z| < 1 \text{ la série est convergente et si } |z| > 1 \text{ elle est divergente. Donc } R = 1.$$

4. On a

$$\begin{aligned} u_n(z) &= (n+1)^{1/n+1} - n^{1/n} = \exp\left(\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right) - \exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \\ &= \exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \left(\exp\left(\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(n)}{n}\right) - 1\right). \end{aligned}$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0, \text{ on a}$$

$$(n+1)^{1/n+1} - n^{1/n} \sim \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(n)}{n} = -\frac{\ln(n)}{n(n+1)} + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n+1} \sim \frac{\ln(n)}{n^2} (+\infty),$$

par suite $R = 1$.

$$5. u_n(z) = \frac{n^n}{n!} z^{3n}. \text{ Pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ on a}$$

$$\frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} |z|^3 = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n |z|^3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = |z|^3 \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln(1+1/n)} = e |z|^3. \text{ La série converge si } e |z|^3 < 1 \text{ et diverge}$$

$$\text{si } e |z|^3 > 1. \text{ Le rayon de convergence est donc } R = \sqrt[3]{\frac{1}{e}}.$$

$$6. u_n(z) = e^{-n^2} z^n, a_n(z) = e^{-n^2}. \text{ D'après la règle de Cauchy on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0^+ \text{ donc } R = +\infty.$$

7. $u_n(z) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)z^n$, $a_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Soit R le rayon de convergence de $\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)z^n$.

Pour $|z| < 1$, comme $|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)z^n| \leq |z|^n$ et $\sum z^n$ convergente alors $\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)z^n$ convergente.

Pour $|z| > 1$, $|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)z^n| \sim \frac{1}{\sqrt{n}} |z|^n = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{n \ln(|z|)} \rightarrow +\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Donc la série diverge pour $|z| > 1$ et comme elle converge pour $|z| < 1$ alors $R = 1$.

Autre méthode. Comme $|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)z^n| \leq |z|^n$ et $\sum z^n$ convergente et a pour rayon de convergence $R' = 1$ donc $R \geq 1$. Puisque pour $|z| > 1$ le terme général ne tend pas vers 0 alors $R \leq 1$ et donc $R = 1$.

8. $u_n(z) = \frac{1}{n} \sin(2n\theta)z^n$.

On a $|\frac{1}{n} \sin(2n\theta)z^n| \leq \frac{1}{n} |z|^n$ et $\sum \frac{1}{n} z^n$ convergente et a pour rayon de convergence $R' = 1$ donc $R \geq 1$. Puisque pour $|z| > 1$ le terme général $\frac{1}{n} \sin(2n\theta) |z|^n$ ne tend pas vers 0 alors $R \leq 1$ et donc $R = 1$.

9. $u_n(z) = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n$, $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$. Notons que $1 + \frac{(-1)^n}{n} \geq 0$. On a

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)} = e^{(-1)^n + o(1)}.$$

Cette expression n'a pas de limite. On écrit la série sous forme de somme de deux séries (en paire et impaire). $\sum a_n z^n = \sum a_{2n} z^{2n} + \sum a_{2n+1} z^{2n+1}$, avec

$$a_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{4n^2} \text{ et } a_{2n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{4n^2+4n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{4n^2+4n}$$

On a pour la première série $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_{2n} z^{2n}|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{4n} |z|^2 = e^2 |z|^2$ donc d'après la règle de Cauchy la première série converge si $e^2 |z|^2 < 1$ et diverge si $e^2 |z|^2 > 1$ ou la série converge si $|z| < e^{-1}$ et diverge si $|z| > e^{-1}$, le rayon de convergence est donc $R_1 = e^{-1}$.

De même pour la deuxième série on a d'après la règle de d'Alembert

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{2n+3}|}{|a_{2n+1}|} |z|^2 = \frac{1}{e^2} |z|^2$, donc série converge si $\frac{1}{e^2} |z|^2 < 1$ et diverge si $\frac{1}{e^2} |z|^2 > 1$ ou la série converge si $|z| < e$ et diverge si $|z| > e$, le rayon de convergence est donc $R_2 = e$.

Finalement le rayon de convergence de la série est $R = \inf(R_1, R_2) = \frac{1}{e}$.

10. $u_n(z) = 8^{-n} z^{3n}$, $a_n = 8^{-n}$. La règle de d'Alembert donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{8^{-n} |z|^{3n}} = 8^{-1} |z|^3$. Donc la série converge si $8^{-1} |z|^3 < 1$ ($|z| < \sqrt[3]{8} = 2$) et diverge si $8^{-1} |z|^3 > 1$ ($|z| > \sqrt[3]{8} = 2$) et le rayon de convergence est $R = 2$.

Remarque : Si on considère seulement le coefficient $a_n = 8^{-n}$ on aura $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{8^{-n}}} = 8$.

Exercice 2.1.2

Soit $a_n z^n$ de rayon de convergence R . Déterminer R' le rayon de convergence de la série entière $a_n z^{2n}$.

Corrigé 2.1.2 D'après la règle de Cauchy on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} |z|^{2n} = |z|^2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|^2}{R}$.

La série converge si $\frac{|z|^2}{R} < 1$ et diverge si $\frac{|z|^2}{R} > 1$, c'est-à-dire converge si $|z| < \sqrt{R}$ et diverge si $|z| > \sqrt{R}$. Donc le rayon de convergence est $R' = \sqrt{R}$.

Exercice 2.1.3 On considère les séries entières de termes généraux :

$$1. u_n(z) = z^n,$$

$$2. u_n(z) = nz^n,$$

$$3. u_n(z) = \frac{1}{n} z^n,$$

$$4. u_n(z) = \frac{n}{n+2} z^n,$$

$$5. u_n(z) = \frac{n^2 + n - 1}{n!} z^n,$$

$$6. u_n(x) = (-1)^n (4z + 1)^n,$$

$$7. u_n(x) = \frac{(x-1)^{2n}}{4^n},$$

1. Déterminer le rayon et le domaine de convergence de chacune des séries entières et leurs convergences aux points de la frontière du domaine de convergence.

2. Calculer la somme de la série entière dans l'intervalle de convergence.

Corrigé 2.1.3

1. Rayon et le domaine de convergence et convergence aux points de la frontière.

(a) $u_n(z) = z^n$, $a^n = 1$ donc $R_1 = 1$. la série converge pour $|z| < 1$ et diverge sur la frontière (cercle de centre et de rayon 1) $|z| = 1$ car $\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ |z|=1}} |z|^n = 1 \neq 0$.

(b) $u_n(z) = nz^n$. On a $a^n = n$ donc $R_1 = 1$. La série converge pour $|z| < 1$ et diverge sur la frontière $|z| = 1$ car $\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ |z|=1}} n |z|^n = +\infty \neq 0$.

(c) Pour $z \in \mathbb{R}$ on a $u_n(z) = \frac{1}{n} z^n$,

$a^n = \frac{1}{n}$ donc $R_1 = 1$. la série converge pour $-1 < z < 1$. Pour $z = -1$ la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge et pour $z = 1$ série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Donc la série $\sum \frac{z^n}{n}$ converge sur $[-1, 1[$.

(d) $u_n(z) = \frac{n}{n+2} z^n$, $a^n = \frac{n}{n+2}$ donc $R_1 = 1$. La série converge pour $|z| < 1$ et diverge sur la frontière $|z| = 1$ car $\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ |z|=1}} \frac{3n}{n+2} |z|^n \neq 0$.

(e) $u_n(z) = \frac{n^2 + n - 1}{n!} z^n$. On a $a_n = \frac{n^2 + n - 1}{n!}$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{n^2 + n - 1} \frac{1}{n+1} = 0$, et par suite $R = +\infty$.

(f) $u_n(x) = (-1)^n (4z + 1)^n$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|(-1)^n (4z + 1)^n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|(-1)^n (4z + 1)^n|} = |4z + 1|$.

La série converge pour $|4z + 1| < 1$ et diverge pour $|4z + 1| > 1$. donc la série converge pour $|z + \frac{1}{4}| < \frac{1}{4}$ et diverge pour $|z + \frac{1}{4}| > \frac{1}{4}$. Le domaine de convergence est donc le disque de centre $A(-1/4, 0)$ et de rayon $1/4$.

Convergence sur la frontière : Pour $|z - \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$ le terme général ne tend pas vers 0, donc la série ne converge pas.

- (g) $u_n(x) = \frac{(x-1)^{2n}}{4^n}$. La série converge pour $\frac{|x-1|^2}{4} < 1$ et diverge pour $\frac{|x-1|^2}{4} > 1$. donc la série converge pour $x \in]-1, 4[$ et diverge sinon.

Convergence aux bords : Pour $x = -1$ le terme général est $u_n(-1) = \frac{(-2)^{2n}}{4^n} = 1$ qui ne tend pas vers 0, donc la série ne converge pas.

Pour $x = 4$ le terme général est $u_n(-1) = \frac{3^{2n}}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ qui converge en tant que série géométrique et $-1 < \frac{3}{4} < 1$.

2. Calcul des sommes des séries entières dans l'intervalle de convergence.

- (a) La somme de la série $\sum z^n$ sur $|z| < 1$ est $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

- (b) La somme de la série $\sum nz^n$ sur $|z| < 1$ et pour $z \in \mathbb{R}$ est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nz^n = z \sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = z \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \right)' = z \left(\frac{1}{1-z} \right)' = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

- (c) La somme de la série $\sum \frac{1}{n} z^n$ sur $|z| < 1$ et pour $z \in \mathbb{R}$ est

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^z t^{n-1} dt \\ &= \int_0^z \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \right) dt = \int_0^z \left(\frac{1}{1-t} \right) dt \\ &= -[\ln(1-t)]_0^z = -\ln(1-z). \end{aligned}$$

- (d) La somme de la série $\sum \frac{n}{n+2} z^n$ sur $|z| < 1$ et pour $z \in \mathbb{R}$ est

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} z^n = \int_0^z \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t^n \right) dt = \int_0^z \left(\frac{1}{1-t} \right) dt = -[\ln(1-t)]_0^z = -\ln(1-z).$$

On a pour tout $z \in]-1, 1[$,

$$\frac{n}{n+2} z^n = \frac{n+2-2}{n+2} z^n = \left(z^n - \frac{2}{n+2} z^n \right) = \left(z^n - \frac{2}{z^2} z^{n+2} \right).$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+2} z^n &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} z^n - \frac{2}{z^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n+2}}{n+2} \right) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} z^n - \frac{2}{z^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n+2}}{n+2} \right) \\ &= \frac{z}{1-z} - \frac{2}{z^2} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = \frac{z}{1-z} - \frac{2}{z^2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} - z - \frac{z^2}{2} \right) \\ &= \frac{z}{1-z} - \frac{2}{z^2} \left(-\ln(1-z) - z - \frac{z^2}{2} \right) = \frac{2\ln(1-z)}{z^2} - \frac{z-2}{z(1-z)} \end{aligned}$$

(e) $u_n(z) = \frac{n^2 + n - 1}{n!} z^n$. La somme de la série $\sum \frac{n}{n+2} z^n$ sur \mathbb{R} est

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + n - 1}{n!} z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!} z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{(n-1)!} - e^z \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{(n-1)!} + z \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} - e^z \\ &= z^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^{n-2}}{(n-2)!} + z \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + z \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} - e^z \\ &= z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} + z \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} + z \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} - e^z = (z^2 + 2z - 1)e^z. \end{aligned}$$

(f) Pour $|z| < 1$ la somme de la série $\sum (-1)^n (4z + 1)^n$ sur est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1(4z + 1))^n = \frac{1}{1 + 4z + 1} = \frac{1}{2 + 4z}.$$

(g) $u_n(x) = \frac{(x-1)^{2n}}{4^n}$. Pour $x \in]-1, 4[$ la somme de la série est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(x-1)^2}{4} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{(x-1)^2}{4}} = \frac{4}{4 - (x-1)^2} = \frac{4}{(3+x)(5+x)}.$$

2.2 Développement en séries entières

Exercice 2.2.1

Développer en séries entières au voisinage de 0 les fonctions suivantes (en précisant le rayon de convergence) :

1. $\frac{1}{(1-x)(2+x)}$

2. $f(x) = \ln \left(\frac{2+x}{1-x} \right)$

3. $f(x) = \arctan \left(\frac{x-1}{1+x} \right), x \in \mathbb{R}$

4. $f(z) = \frac{1}{6z^2 - 5z + 1}, z \in \mathbb{C}$

5. $f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{(x-1)^2(2x-1)}, x \in \mathbb{R}$

6. $f(x) = e^x \sin(x)$ et $g(x) = e^x \cos(x)$.

Corrigé 2.2.1

1. $f(x) = \frac{1}{(1-x)(2+x)}$. On a pour tout $x \neq 1$ et $x \neq -2$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)(2+x)} &= \frac{\frac{1/3}{1-x} + \frac{1/3}{2+x}}{1-x} = \frac{1/3}{1-x} + \frac{1/6}{1+x/2} \quad x \neq 1 \text{ et } x \neq -2 \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{(-1)^n}{6 \cdot 2^n} \right) x^n, \quad |x| < 1 \text{ et } |x| < 2. \end{aligned}$$

Donc le développer en séries entières de f est :

$$\forall x \in]-1, 1[; \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{(-1)^n}{6 \cdot 2^n} \right) x^n.$$

2. $f(x) = \ln \left(\frac{2+x}{1-x} \right). \forall x \in]-1, 1[$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln \left(\frac{2+x}{1-x} \right) = \ln(2+x) - \ln(1-x) = \ln(2) + \ln(1+x/2) - \ln(1-x) \\ &= \ln(2) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n \cdot 2^n} \end{aligned}$$

3. $f(x) = \arctan \left(\frac{x-1}{1+x} \right), x \in \mathbb{R}.$

$$\text{Pour tout } x \neq -1 \quad f'(x) = \frac{\left(\frac{x-1}{1+x} \right)'}{1 \left(\frac{x-1}{1+x} \right)^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Comme au voisinage de 0 on a $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$ alors $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + c$, et

$f(0) = c = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ donc le développement en série entière de f est

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

4. On a pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{1}{6z^2 - 5z + 1} = \frac{1}{(3z-1)(2z-1)} = \frac{3}{1-3z} - \frac{2}{1-2z}.$$

Pour $|z| < \frac{1}{3}$, $\frac{1}{1-3z} = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n z^n$ et pour $|z| < \frac{1}{2}$ $\frac{1}{1-2z} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^n$. Le rayon de convergence

du développement en série entière de f est $R = \inf \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$ (comme somme de deux séries de rayons de convergence différents.)

Donc pour $|z| < \frac{1}{3}$

$$f(z) = \frac{1}{6z^2 - 5z + 1} = \frac{1}{1-3z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (3^{n+1} - 2^{n+1}) z^n.$$

5. On a pour tout $x \neq 1$ et $x \neq 1/2$ $f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{(x-1)^2(2x-1)} = \frac{9}{1-2x} - \frac{5}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2}.$

Pour $|x| < 1/2$, $\frac{9}{1-2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} 9 \cdot 2^n x^n$ et pour $|x| < 1$ $\frac{5}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} 5 \cdot x^n$.

Comme $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ alors $\left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$.

Donc pour $|x| < 1/2$ le développement en série entière de f est

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{(x-1)^2(2x-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-5 + 9 \cdot 2^n - n)x^n.$$

6. $f(x) = e^x \sin(x)$ et $g(x) = e^x \cos(x)$.

Pour tout x on a $f(x) + ig(x) = e^x \cos(x) + ie^x \sin(x) = e^{x(1+i)}$ et $e^{(i+1)x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i+1)^n x^n}{n!}$.

Or $(i+1)^n = (\sqrt{2})^n (\cos(\pi/4) + i \cos(\pi/4))^n = (\sqrt{2})^n (\cos(n\pi/4) + i \cos(n\pi/4))$, d'où

$$f(x) + ig(x) = e^{x(1+i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i+1)^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^n \cos(n\pi/4) \frac{x^n}{n!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^n \sin(n\pi/4) \frac{x^n}{n!}$$

Donc $f(x) = e^x \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^n \cos(n\pi/4) \frac{x^n}{n!}$ et $g(x) = e^x \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^n \sin(n\pi/4) \frac{x^n}{n!}$

Exercice 2.2.2

Développer en séries entières au voisinage de 0 les fonctions suivantes

1. $f(x) = \frac{e^{x^2}}{1-x^2}$ puis la fonction $g(x) = \frac{e^{x^2}}{1-x}$.

2. $h(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$.

Corrigé 2.2.2

1. $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^{2n} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) x^{2n}$. Donc

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{e^x}{1-x} = (1+x)f(x) = (1+x) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) x^{2n+1} \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} h'(x) &= (2x)'F(2x) - (x)'F(x) \text{ où } F(x) = e^{-x^2} \\ &= 2F(2x) - F(x) = e^{-(2x)^2} - e^{-x^2} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (-2x)^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (-x^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} 2^{2n+1} x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} - 1}{n!} x^{2n}. \end{aligned}$$

Donc $h(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} - 1}{(2n+1)n!} x^{2n+1}$

Exercice 2.2.3

En utilisant la série $\sum x^n$ montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} = 1 - 2\ln(2)$.

Corrigé 2.2.3

On a pour tout $x \in]-1, 1[$ $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = -\int_{t=0}^x \ln(1-t) dt = -[(t-1)\ln(1-t) - t]_0^x = x - (x-1)\ln(1-x).$$

Pour $x = -1$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = (-1-1)\ln(2) + 1 = -1 + 2\ln(2)$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} = 1 - 2\ln(2)$.

Exercice 2.2.4

On rappelle que $\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \int_0^\alpha \frac{dx}{1-x}$

1. En utilisant la somme de la série $\sum x^n$ montrer que $\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$
2. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$

Corrigé 2.2.4

1. En utilisant la somme de la série $\sum x^n$ montrer que $\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$.

On a $\int_{t=0}^{t=\alpha} \frac{1}{1-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}$ donc

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \int_{t=0}^{t=\alpha} \frac{1}{1-x} dx = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}.$$

2. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$.

Comme $\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \int_{t=0}^{t=\alpha} \frac{1}{1-x} dx = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} [\ln(1-\alpha)] = +\infty$ alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} = \int_{t=0}^{t=\alpha} \frac{1}{1-x} dx = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} [\ln(1-\alpha)] = +\infty.$$

Exercice 2.2.5

1. Déterminer le développement en série entière, au voisinage de 0, des fonctions $x \rightarrow \frac{1}{1-4x}$ et $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.
2. En écrivant $\frac{1}{1-4x} = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \times \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{p=0}^n \frac{(2p)!}{(p!)^2} \times \frac{(2n-2p)!}{[(n-p)!]^2} = 4^n.$$

Corrigé 2.2.5

1. Déterminer le développement en série entière, au voisinage de 0, des fonctions $\frac{1}{1-4x}$ et $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

Pour $|x| < \frac{1}{4}$,

$$\frac{1}{1-4x} = \sum_{n=0}^{+\infty} 4^n x^n \text{ et } \frac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1-4x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} 4^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n.$$

2. On a pour tout $|x| < \frac{1}{4}$, l'égalité $\frac{1}{1-4x} = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ est équivalente à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 4^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \right) x^n, \text{ où } a_k = \frac{(2k)!}{(k!)^2}.$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, 4^n = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{(2n-2k)!}{(n-k)!^2}.$$

2.3 Calcul de la somme d'une série entière**Exercice 2.3.1**

1. Donner le rayon de convergence des séries entières et exprimer leurs sommes en termes de fonctions élémentaires :

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n+1} x^n, n \geq 0, x \in \mathbb{R}.$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!} x^n, n \geq 0, x \in \mathbb{R}.$$

2. Soit la série entière $\sum (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}) z^n, n \geq 1$.

(a) Déterminer le rayon de convergence de cette série.

(b) Calculer la somme $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}) z^n$.

Corrigé 2.3.1

1. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n+1} x^n, n \geq 0, x \in \mathbb{R}$. Le rayon de convergence est $R = 1$ (utiliser le critère de d'Alembert.) Pour tout $x \in]-1, 1[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \ln(1-x).$$

(b) $\sum \frac{n^3}{n!} x^n, n \geq 0, x \in \mathbb{R}$. Le rayon de convergence est $R = +\infty$ (utiliser le critère de d'Alembert.) Pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Pour } n \geq 3 \quad \frac{n^3}{n!} = \frac{1}{(n-3)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} x^n &= \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-3)!} x^n + 3 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^{n+3} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^{n+1} \\ &= (x^3 + 3x^2 + x)e^x. \end{aligned}$$

2. Soit la série entière $\sum (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}) z^n, n \geq 1$.

(a) Déterminer le rayon de convergence de cette série.

$$\text{On a pour tout } n \in \mathbb{N}^* \quad 1 \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq n.$$

Comme les rayons de convergence des séries $\sum z^n$ et $\sum n z^n$ sont égaux à 1 alors le rayon de convergence est de la série $\sum (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}) z^n$ est $R = 1$.

(b) Calcul de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}) z^n$.

$$\text{On a } \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

$$\text{où } a_n = \frac{1}{n}, b_n = 1 \text{ et } c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}. \text{ Donc la somme est}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \ln(1-z) \cdot \frac{z}{1-z}.$$

Exercice 2.3.2

En étudiant la somme $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ déterminer la somme de la série $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$. En déduire les sommes des séries $\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) \frac{1}{2^n}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Corrigé 2.3.2 Pour tout $x \in]-1, 1[$ $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = f(x)$ donc $x \in]-1, 1[$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = f''(x) = \left(\frac{1}{1-x} \right)'' = \left(\frac{1}{(1-x)^2} \right)' = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Calcul de $\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) \frac{1}{2^n}$. On peut écrire $f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$.

Pour $x = \frac{1}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \frac{1}{2^{n-1}} = f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} = 16$ donc $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \frac{1}{2^n} = 8$.

Calcul de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$. On a Pour tout $x \in]-1, 1[$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \frac{1}{2^n} = 8 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 8.$$

Donc $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{1}{2^n} = 8 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Or $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ d'où $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 4 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$ et donc $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6$.

Exercice 2.3.3

Pour $x \in \mathbb{R}$ soit la série entière de terme général $u_n(x) = \frac{x^n}{4n^2 - 1}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière.

2. Calculer la somme $u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

3. En déduire les sommes $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ et $S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$.

Corrigé 2.3.3

1. Rayon de convergence de la série entière $u(x) = \sum \frac{x^n}{4n^2 - 1}$. On a $a_n = \frac{1}{4n^2 - 1}$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - 1}{4(n+1)^2 - 1} = 1, \text{ donc le rayon de convergence est } R = 1.$$

2. Calcul de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

On a pour $x \in]-1, 1[$ et $n \geq 0$, $\frac{x^n}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) x^n$. Donc

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \frac{1}{2} \left(-1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} \right)$$

♠ Pour $x \in]0, 1[$

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2} \left(-1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-1 + \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-1 + \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \ln \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \right) \right) \end{aligned}$$

♠ Pour $x \in]-1, 0[$

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2} \left(-1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-1 - \left(\sqrt{-x} - \frac{1}{\sqrt{-x}} \right) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{-x})^{2n+1}}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-1 - \left(\sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \arctan(\sqrt{-x}) \right) \end{aligned}$$

♠ $u(0) = -1$

3. Calcul des sommes $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ et $S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$.

Maintenant, la somme est en fait définie sur $[-1, 1]$ car les séries numériques de termes généraux $\frac{1}{4n^2 - 1}$ et $\frac{1}{4n^2 + 1}$ convergent par équivalence à la série de Riemann $\frac{1}{n^2}$.

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} u(x) = -\frac{1}{2}$$

$$S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} u(x) = \frac{\pi + 2}{4}.$$

2.4 Méthode d'équation différentielle

Exercice 2.4.1

Montrer que l'équation

$$(E) : 3xy' + (2 - 5x)y = x. \quad (1)$$

Déterminer la solution développable en série entière au voisinage de 0.

Corrigé 2.4.1

Posons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On a $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$. L'équation (E) est équivalente à

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 3n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 5a_n x^{n+1} = x.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 3n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} 5a_{n-1} x^n = x.$$

$$2a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (3n a_n + 2a_n - 5a_{n-1}) x^n = x.$$

$$2a_0 + 3a_1 + 2a_1 - 5a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} (3n a_n + 2a_n - 5a_{n-1}) x^n = x.$$

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad a_n = \frac{5}{3n+2} a_{n-1} \quad n \geq 1.$$

$$\text{Donc } a_n = \frac{5^{n-2}}{\prod_{k=2}^n (3k+2)} \quad n \geq 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^{n-2}}{\prod_{k=2}^n (3k+2)} x^n.$$

Exercice 2.4.2

$$\text{Soit } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière correspondante.
2. Calculer $f'(x)$, et donner une équation différentielle (E) vérifiée par f .
3. Résoudre l'équation (E) et déduire la fonction f à l'aide de fonctions élémentaires.

Corrigé 2.4.2

1. Rayon de convergence de la série entière.

$$\text{On a pour } x \neq 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2(n+1))!} x^{2(n+1)} \cdot (2n)! x^{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{(2(n+1))!} |x|^2 = +\infty, \text{ donc } R = +\infty.$$

2. Calculer $f'(x)$, et donner une équation différentielle (E) vérifiée par f .

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)!} x^{2n-1}.$$

$$(E) : \quad f'(x) + f(x) = e^x. \quad (2)$$

3. Résoudre l'équation (E) et déduire la fonction f à l'aide de fonctions élémentaires.

$$f'(x) + f(x) = 0 \text{ admet pour solution générale } f_1(x) = c.e^{-x}.$$

$$f'(x) + f(x) = e^x \text{ admet pour solution particulière } f_2(x) = \frac{1}{2}e^x \text{ donc solution générale de l'équation } \exists \text{ est } f(x) = c.e^{-x} + \frac{1}{2}e^x \text{ et comme } f(0) = 1 \text{ alors } c = \frac{1}{2} \text{ et } f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch(x).$$

Exercice 2.4.3

$$\text{Soit la fonction définie } f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}.$$

$$\text{Donner son développement de } f. \text{ (Indication : poser } x = sh(y) \text{ et utiliser la fonction } g(y) = f(sh(y)).$$

$$\text{On rappelle que } ch^2(y) - sh^2(y) = 1 \text{ et } ch(y) + sh(y) = e^y.$$

Corrigé 2.4.3

$$\text{On a } g(y) = f(sh(y)) = \sqrt{sh(y) + \sqrt{1+sh(y)^2}} = \sqrt{sh(y) + \sqrt{1+sh(y)^2}} = f(x), \text{ donc}$$

$$f(sh(y)) = \sqrt{sh(y) + \sqrt{1+sh(y)^2}} = \sqrt{sh(y) + ch(y)} = e^{y/2}.$$

En dérivant deux fois les deux membres de cette dernière égalité et en remarquant que

$$e^{y/2} = \sqrt{e^y} = \sqrt{ch(y) + sh(y)} = f(x)$$

on a

$$\begin{cases} g'(y) = (sh(y))' f'(sh(y)) = ch(y) f'(sh(y)) = \frac{1}{2} e^{y/2} \\ g''(y) = sh(y) f'(sh(y)) + ch^2(y) f''(sh(y)) = \frac{1}{4} e^{y/2}. \end{cases}$$

En revenant à x on aura

$$x f'(x) + (1 + x^2) f''(x) = \frac{1}{4} f(x). \quad (3)$$

En posant $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et en remplaçant dans l'équation différentielle 3 on obtient par identification des coefficients $4(k+1)(k+2)a_{k+2} = -(2k+1)(2k-1)a_k$ avec $a_0 = f(0) = 1$ et $a_1 = f'(0) = \frac{1}{2}$.
Donc

$$\begin{cases} a_{2n} = \frac{(-1)^n C_{4n-2}^{2n-1}}{n 2^{4n}}; & n \geq 1 \\ a_{2n+1} = \frac{(-1)^n C_{4n}^{2n}}{(2n+1) 2^{4n+1}}; & n \geq 0. \end{cases}$$

Le rayon de convergence est $R = 1$.

Exercice 2.4.4

1. Décomposer en éléments simples la fraction suivante $f(x) = \frac{5+x}{3+2x-x^2}$.
2. Développer en série entière sur un intervalle que l'on déterminera la fonction f .
3. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Utiliser la relation $(3+2x-x^2) \times f(x) = 5+x$ et par identification déterminer la relation de récurrence vérifiée par les coefficients a_n . En déduire les valeurs de a_n .

Corrigé 2.4.4

1. Décomposer en éléments simples la fraction suivante $f(x) = \frac{5+x}{3+2x-x^2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 3+2x-x^2 = (1+x)(3-x)$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$

$$\frac{5+x}{3+2x-x^2} = \frac{1}{1+x} + \frac{2}{3-x}.$$

2. Développer en série entière sur un intervalle que l'on déterminera la fonction f .

On a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$ et $|x| < \frac{1}{3}$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{3} \frac{1}{1-x/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n + \frac{2}{3^{n+1}} \right) x^n.$$

3. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. En utilisant la relation

$$(3+2x-x^2) \times f(x) = 5+x \quad (4)$$

et par identification déterminer la relation de récurrence vérifiée par les coefficients a_n . En déduire les valeurs de a_n .

D'après la relation 4 on a

$$(3 + 2x - x^2) \times f(x) = 5 + x \Leftrightarrow (3 + 2x - x^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 5 + x$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 5 + x$$

ou

$$3a_0 + (3a_1 + 2a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty} (3a_n + 2a_{n-1} - a_{n-2})x^n = 5 + x.$$

On trouve alors la relation de récurrence vérifiée par les coefficients a_n :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{5}{3} \\ a_1 = -\frac{7}{9} \\ 3a_n + 2a_{n-1} - a_{n-2} = 0, \quad \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Détermination de a_n . $3a_n + 2a_{n-1} - a_{n-2} = 0$

Racines de l'équation $3r^2 + 2r - 1 = 0$.

On a $\Delta' = 1 + 3 = 4$ donc $r_1 = -1$ et $r_2 = \frac{1}{3}$ donc $a_n = \alpha(-1)^n + \beta\left(\frac{1}{3}\right)^n$, et comme

$a_0 = \alpha + \beta = \frac{5}{3}$ et $a_1 = -\alpha + \frac{\beta}{3} = -\frac{7}{9}$ alors $\alpha = 1$ et $\frac{2}{3}$ et donc

$$a_n = (-1)^n + \frac{2}{3^{n+1}}.$$

Le rayon de convergence est $R = \frac{1}{3}$ et

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{3} \frac{1}{1-x/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n + \frac{2}{3^{n+1}} \right) x^n.$$

CHAPITRE

3

Séries de Fourier

3.1 Développement en série de Fourier

Exercice 3.1.1

1. Soit f la fonction "créneau" définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si, } 0 \leq x < \pi, \\ -1 & \text{si, } -\pi \leq x < 0. \end{cases} ,$$

et prolongée par 2π -périodicité.

- (a) Représenter le graphe de f sur $[-3\pi, 4\pi]$.
 - (b) Calculer $f(\frac{29}{5}\pi)$ et $f(\frac{-11}{3}\pi)$.
 - (c) La fonction f est-elle continue ? est-elle de classe \mathcal{C}^1 ?
 - (d) Donner la série de Fourier associée à f .
 - (e) Que dire de la convergence de la série de Fourier de f ?
 - (f) Peut-on avoir convergence normale de la série de Fourier de f vers f sur $[-\pi, \pi]$?
2. Soit f la fonction paire $-\pi$ -périodique définie par $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, \pi]$. f est-elle \mathcal{C}^1 par morceaux ?

Corrigé 3.1.1 1. Soit f la fonction "créneau" définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si, } 0 \leq x < \pi, \\ -1 & \text{si, } -\pi \leq x < 0. \end{cases} ,$$

et prolongée par 2π -périodicité.

(a) Graphe

(b) Calculer $f(\frac{29}{5}\pi) = f(6\pi + \frac{1}{5}\pi) = f(\frac{1}{5}\pi) = 1$

$$f(\frac{-11}{3}\pi) = f(-4\pi + \frac{1}{3}\pi) = f(\frac{1}{3}\pi) = 1.$$

(c) La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. En effet, sur l'intervalle $[0, \pi[$, elle est la restriction à $[0, \pi[$ d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$ (la fonction identiquement égale à 1), et sur $[-\pi, 0]$, elle est la restriction d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$ (la fonction identiquement égale à -1).

(d) Série de Fourier associée. Puisque la fonction est impaire a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad S_f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx).$$

Les coefficients de Fourier de la fonction f sont $a_n = 0$ car f est impaire pour tout n , et

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(nx) dx = \frac{2}{n\pi} \left[-\cos(nx) \right]_0^\pi \\ &= \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

La série de Fourier associée à f est $S_f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$.

(e) La fonction est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et discontinue convergence est donc simple et le théorème de Dirichlet peut donc s'appliquer. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série de Fourier de f converge vers

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x^+} f(x) \right).$$

(f) La série de Fourier de f ne peut pas converger normalement vers f . En effet, si on avait convergence normale, chaque somme partielle étant continue, la limite serait elle aussi continue. Mais f n'est pas continue.

2. La fonction f n'est pas de classe \mathcal{C}^1 par morceaux : en effet, sinon, on pourrait définir sur $[0, \pi]$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 qui coïncide avec f sur $]0, \pi]$. Ce n'est pas possible car $f'(x)$ tend vers $+\infty$ en 0.

Exercice 3.1.2

1. Soit la fonction f , 2π -périodique, définie par $f(x) = x$ si $-\pi < x < \pi$.

Calculer les coefficients de Fourier de f .

2. Soit la fonction L -périodique ($L > 0$) définie par $f(x) = |x|$ pour $x \in]-L/2, L/2]$.

(a) Représenter le graphe de f sur $[-2L, 3L]$.

(b) Développer en séries de Fourier la fonction f .

(c) Quelle est la nature de la convergence de la série de Fourier associée à f ?

Corrigé 3.1.2

1. Soit la fonction f , 2π -périodique, définie par $f(x) = x$ si $-\pi < x < \pi$.

Cette fonction est impaire, il suffit donc de calculer les coefficients en sinus :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(nx) dx = \frac{-2}{n\pi} [\cos(nx)]_0^\pi = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)).$$

Ceci s'écrit plus simplement :

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

2. Soit la fonction L -périodique ($L > 0$) définie par $f(x) = |x|$ pour $x \in]-L/2, L/2]$.

(a) Graphe.

(b) Remarquons que la fonction est paire : il suffit donc de calculer les coefficients en cosinus.

On a :

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} |x| dx = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} x dx = \frac{L}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} |x| \cos\left(\frac{2\pi}{L}nx\right) dx = \frac{4}{L} \int_0^{L/2} x \cos\left(\frac{2\pi}{L}nx\right) dx$$

Par intégration par parties il est facile de trouver les coefficients

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{2L}{n^2\pi^2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

- (c) La convergence est normale puisque f est continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et la série $\sum -\frac{2L}{n^2\pi^2}$ est absolument convergente

Exercice 3.1.3

Calculer le développement des fonctions f 2π -périodiques telles que :

- | | |
|---|-------------------------------|
| 1. $f(x) = \pi - x $ sur $]-\pi, \pi[$. | 4. $f(x) = \max(0, \sin x)$. |
| 2. $f(x) = \pi - x$ sur $]0, 2\pi[$. | 5. $f(x) = \sin x ^3$. |
| 3. $f(x) = x^2$ sur $]0, 2\pi[$. | |

Corrigé 3.1.3 Développement des fonctions f 2π -périodiques telles que :

1. On a pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$a_0 = \pi; \quad a_{2p} = 0, \quad a_{2p+1} = \frac{4}{\pi(2p+1)^2}, \quad b_n = 0.$$

Donc

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + 4 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos(2p+1)x}{\pi(2p+1)^2}$$

2.

$$a_n = 0, b_n = \frac{2}{n}.$$

3.

$$a_0 = \frac{8\pi^2}{3}, a_n = \frac{4}{n^2}, b_n = -\frac{4\pi}{n}.$$

4.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}, a_{2p} = \frac{-2}{\pi(4p^2 - 1)}, a_{2p+1} = 0, b_1 = \frac{1}{2}, b_p = 0.$$

5.

$$a_{2p} = \frac{24}{\pi(4p^2 - 1)(4p^2 - 9)}, a_{2p+1} = 0, b_p = 0.$$

3.2 Série de Fourier : calcul de somme

Exercice 3.2.1 Soit la fonction 2π -périodique définie par : $f(x) = x^2$, si $x \in [-\pi, \pi]$.

1. Déterminer la série de Fourier associée à f .

2. En déduire la somme des séries $\sum \frac{1}{n^2}$, $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, $\sum \frac{1}{n^4}$.

Corrigé 3.2.1

1. La fonction f est paire, ses coefficients en sinus sont donc nuls, et on a :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3} \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx.$$

Une intégration par parties deux fois donne : $a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}$.

La fonction f est continue et \mathcal{C}^1 par morceaux d'après le théorème de Dirichlet cette fonction est somme de sa série de Fourier pour tout réel, et on a donc, pour tout x dans $[-\pi, \pi]$,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

2. Calcul des sommes : Si on pose $x = \pi$, on obtient : $f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Si on pose $x = 0$, on obtient cette fois $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

Pour calculer la dernière somme demandée, il faut pouvoir mettre les coefficients au carré, et c'est ce que l'on obtient dans l'égalité de Parseval, que l'on peut appliquer ici puisque f est continue :

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^2}{9} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{n^4}.$$

Ceci donne : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{8} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) = \frac{\pi^4}{90}$.

Exercice 3.2.2

Soit f la fonction périodique de période 2π définie par : $f(t) = |\sin(t)|$ pour $-\pi < t \leq \pi$.

1. Donner le développement en série de Fourier de f .
2. Montrer que cette série converge normalement vers f .

3. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}$.

Corrigé 3.2.2

1. La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et développable en série de Fourier sur \mathbb{R} . Puisque f est paire ce développement est en série de cosinus, donc $b_n = 0$ pour tout n .

On a $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(x) dx = \frac{2}{\pi} \left[-\cos(x) \right]_0^\pi = \frac{4}{\pi}$, et pour tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi |\sin(x)| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[\sin((1+n)x) + \sin((1-n)x) \right] dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos((n-1)x)}{n-1} - \frac{\cos((n+1)x)}{n+1} \right]_0^\pi. \end{aligned}$$

Pour $n = 2p$, $a_{2p} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos((2p-1)x)}{2p-1} - \frac{\cos((2p+1)x)}{2p+1} \right]_0^\pi = -\frac{4}{\pi(4p^2 - 1)}.$

Pour $n = 2p+1$, $a_{2p+1} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos((2p)x)}{2p} - \frac{\cos((2p+2)x)}{2(p+1)} \right]_0^\pi = 0.$

D'où la série de Fourier est :

$$S_f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}.$$

2. La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et continue sur \mathbb{R} sa série de Fourier converge normalement vers f . Donc

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1} \quad (1)$$

3. Si on remplace dans la relation (1) x par 0 on trouvera

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 3.2.3

Soit f la fonction périodique de période 2π définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si, } 0 < x < 2\pi, \\ \pi & \text{si, } x = 0. \end{cases}$$

1. Donner le développement en série de Fourier de f .

2. En déduire la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$

Corrigé 3.2.3

1. La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et développable en série de Fourier sur \mathbb{R} .

On a

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

Pour $n \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cdot \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[0 - \frac{1}{n} \left[-\frac{\cos((nx))}{n} \right]_0^{2\pi} \right] = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cdot \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{2\pi}{n} + \frac{1}{n} \left[\frac{\sin((nx))}{n} \right]_0^{2\pi} \right] = 0. \end{aligned}$$

D'où la série de Fourier est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : S_f(x) = \pi - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \quad (2)$$

2. La fonction f est continue en $\frac{\pi}{2}$ donc $S_f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2})$ et si on remplace dans la relation (2) x par $\frac{\pi}{2}$ on trouvera :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 3.2.4

Soit f la fonction 2π -périodique et paire définie sur $]0, \pi[$ par $f(x) = x(2\pi - x)$.

1. Développer f en série de Fourier.

2. En déduire les sommes : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

Corrigé 3.2.4

1. La fonction f est caractérisée par sa restriction sur $]0, 2\pi[$. Comme $f(0) = f(0^+) = f(2\pi^-) = 0$, f est continue sur \mathbb{R} .

La restriction de f à $[0, 2\pi]$ est de classe \mathcal{C}^∞ , donc f est de classe \mathcal{C}^∞ par morceaux.

Calcul des coefficients. La fonction f est paire, donc $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(2\pi - x) dx = \frac{2}{\pi} \left[\pi x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^\pi = \frac{4\pi^2}{3}$$

Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(2\pi - x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \left[x(2\pi - x) \sin(nx) \right]_0^\pi - \frac{4}{n\pi} \int_0^\pi (\pi - x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{4}{n^2\pi} \left[(\pi - x) \cos(nx) \right]_0^\pi + \frac{4}{n^2\pi} \int_0^\pi \cos(nx) dx = -\frac{4}{n^2}. \end{aligned}$$

Développement en séries de Fourier de f . Comme f est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, le théorème de Dirichlet prouve que f est développable en série de Fourier et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{2\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

La convergence normale sur \mathbb{R} est évidente.

2. Calcul des sommes de séries.

Pour les trois premières sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ il suffit de poser $x = 0$ pour la première et la deuxième et $x = \pi$ pour la troisième. On obtient alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Pour les autres on utilise l'égalité de Parseval :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{8\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{n^4}.$$

Mais

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f^2(x) dx &= \int_0^\pi (x(2\pi - x))^2 dx = \int_0^\pi (4x^2\pi^2 - 4x^3\pi + x^4) dx \\ &= \left[\frac{4}{3}x^3\pi^2 - x^4\pi + \frac{1}{5}x^5 \right]_0^\pi = \frac{8}{5}\pi^5. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{16}{15}\pi^4 - \frac{8\pi^4}{9} = \frac{8\pi^4}{9} \quad \text{et par suite} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

$$\text{Pour la deuxième somme on a } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^4}.$$

$$\text{Donc } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} + \frac{1}{2^4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \quad \text{et par suite}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \left(1 - \frac{1}{2^4}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{15}{16} \cdot \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Exercice 3.2.5

Soit la fonction f , π -périodique, définie par

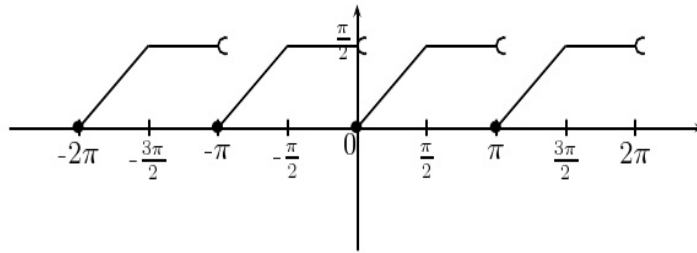
$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

1. Donner la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$,
2. Détermination de la décomposition en série de Fourier de f
 - (a) Calculer la valeur moyenne a_0 de f .
 - (b) Calculer les coefficients a_n , $n \geq 1$.
 - (c) Calculer les coefficients b_n , $n \geq 1$.
3. Calculer la valeur efficace de f .

Corrigé 3.2.5 Soit la fonction f , π -périodique, définie par

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

1. Donner la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$,



Représentation graphique de la fonction f

2. Détermination de la décomposition en série de Fourier de f :

- (a) Calculer la valeur moyenne a_0 de f .

Calculer la valeur moyenne a_0 de f . La période de f est $T = \pi$, et sa pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) dt = \frac{2}{\pi} I \text{ où} \\ I &= \int_0^\pi f(t) dt = \int_0^{\pi/2} f(t) dt + \int_{\pi/2}^\pi \frac{\pi}{2} dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi/2} + \frac{\pi}{2} \left[t \right]_{\pi/2}^\pi = \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } a_0 = \frac{2}{\pi} I, \text{ soit } \boxed{a_0 = \frac{3\pi}{4}}.$$

(b) Calcul des coefficients a_n , $n \geq 1$. Pour tout entier $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(2nt) dt = \frac{2}{\pi} J,$$

$$\text{avec } J = \int_0^\pi f(t) \cos(2nt) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos(2nt) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\pi}{2} \cos(2nt) dt.$$

La première intégrale se calcule en utilisant une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos(2nt) dt &= \left[t \frac{1}{2n} \sin(2nt) \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2n} \sin(2nt) dt \\ &= \frac{\pi}{4n} \sin(n\pi) - \frac{1}{2n} \left[-\frac{1}{2n} \cos(2nt) \right]_{\pi/2}^\pi \\ &= \frac{\pi}{4n} \sin(n\pi) + \frac{1}{4n^2} [\cos(2n\pi) - \cos(n\pi)] \end{aligned}$$

or, pour tout entier n , $\sin(n\pi) = 0$, et $\cos(2n\pi) = 1$, et ainsi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos(2nt) dt = \frac{1}{4n^2} (1 - \cos(n\pi))$$

$$\text{Par ailleurs, } \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\pi}{2} \cos(2nt) dt = \frac{\pi}{4n} [\sin(2n\pi) - \sin(n\pi)] = 0$$

car, pour tout entier n , $\sin(2n\pi) = \sin(n\pi) = 0$.

$$\text{Au final, } a_n = \frac{2}{\pi} J = \frac{1}{\pi} \frac{1}{2n^2} (1 - \cos(n\pi)), \text{ soit } \boxed{a_n = \frac{1}{2\pi n^2} (1 - (-1)^n)}.$$

(c) Calcul des coefficients b_n , $n \geq 1$. Pour tout entier $n \geq 1$, De même que précédemment,

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(2nt) dt$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(t) \sin(2nt) dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(2nt) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\pi}{2} \sin(2nt) dt \\ &= \left[-t \frac{1}{2n} \cos(2nt) \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2n} \cos(2nt) dt + \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2n} \cos(2nt) \right]_{\pi/2}^\pi \\ &= \frac{-\pi}{4n} \cos(n\pi) + \frac{1}{2n} \left[\frac{1}{2n} \sin(2nt) \right]_{\pi/2}^\pi - \frac{\pi}{4n} [\cos(2n\pi) - \cos(n\pi)] \\ &= \frac{-\pi}{4n} \cos(n\pi) - \frac{\pi}{4n} [1 - \cos(n\pi)] = -\frac{\pi}{4n}. \end{aligned}$$

car, pour tout entier n , $\cos(2n\pi) = 1$, $\sin(n\pi) = 0$.

$$\text{Au final, } b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-\pi}{2n}, \text{ soit } \boxed{b_n = -\frac{1}{2n}}.$$

3. Calculer la valeur efficace de f . La valeur efficace μ est donnée par :

$$\begin{aligned} \mu^2 &= \frac{2}{T} \int_0^T (f(x))^2 dt = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^\pi x^2 dx + \int_{\pi/2}^\pi \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^\pi + \frac{\pi^2}{4} \left[x \right]_{\pi/2}^\pi \right) = \frac{\pi^2}{24}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, la valeur efficace de } f \text{ est } \boxed{\mu = \sqrt{\frac{\pi^2}{24}} = \frac{\pi}{2\sqrt{6}}}.$$

Exercice 3.2.6

Soit f la fonction de période 2π , impaire, définie par : $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ si $x \in]0, \pi]$

1. Tracer le graphe de la fonction sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier et la série de Fourier de f .
3. Étudier la convergence de la série de Fourier de f .
4. Calculer les sommes des séries : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n}$.
5. Soit g la fonction de période 2π , impaire, définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\pi - 1}{2}x, & \text{si } x \in]0, 1] \\ f(x), & \text{si } x \in [1, \pi] \end{cases}$$

(a) Tracer le graphe de g la fonction sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} \sin(nx)$.

(c) En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin(n)}{n} \right)^2$.

Corrigé 3.2.6

Soit f la fonction de période 2π , impaire, définie par : $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ si $x \in]0, \pi]$

1. Tracer le graphe de la fonction sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calcul des coefficients de Fourier et la série de Fourier de f .

La fonction est impaire, donc $a_n = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi - x}{2} \sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[-(\pi - x) \cos(nx) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n} \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{n} \sin(nx) \right]_0^\pi = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R} : S_f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(nx)$$

3. Étude de la convergence de la série de Fourier de f .

La fonction est de classe C^1 par morceaux (réunion de segment) et la fonction f est discontinue en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2} \neq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Donc la convergence de la série est simple et on a

$$\forall x \in \mathbb{R} : S_f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

4. Calcul des sommes des séries : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

La fonction est continue en 1 et $\frac{\pi}{2}$ donc $f(1) = S_f(1)$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = S_f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. On obtient alors :

Pour $x = 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = f(1) = \frac{\pi - 1}{2}$

Pour $x = \frac{\pi}{2}$, et utilisant les égalités $\sin((2n+1)\frac{\pi}{2}) = (-1)^n$, et $\sin(n\pi) = 0$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\pi)}{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)\frac{\pi}{2})}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

5. Soit g la fonction de période 2π , impaire, définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\pi-1}{2}x, & \text{si } x \in]0, 1] \\ f(x), & \text{si } x \in [1, \pi] \end{cases}$$

(a) Tracer le graphe de g la fonction sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

(b) Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} \sin(nx)$.

La fonction g est impaire, donc $a_n = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin(nx) dx = \frac{\pi-1}{\pi} \int_0^1 x \sin(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_1^\pi (\pi-x) \sin(nx) dx. \text{ On pose}$$

$$b_n = \frac{\pi-1}{\pi} I_1 + \frac{1}{\pi} I_2.$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 x \sin(nx) dx = \frac{1}{n} \left[-x \cos(nx) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{n} \cos(nx) dx \\ &= -\frac{\cos(n)}{n} + \frac{1}{n^2} \left[\sin(nx) \right]_0^1 = -\frac{\cos(n)}{n} + \frac{\sin(n)}{n^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 (\pi-x) \sin(nx) dx = \frac{1}{n} \left[-(\pi-x) \cos(nx) \right]_1^\pi - \int_1^\pi \frac{1}{n} \cos(nx) dx \\ &= -\frac{\pi-1}{n} \cos(n) - \frac{1}{n^2} \left[\sin(nx) \right]_1^\pi = -\frac{\pi-1}{n} \cos(n) + \frac{\sin(n)}{n^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } b_n = -\frac{\pi-1}{\pi} \frac{\cos(n)}{n} + \frac{\pi-1}{\pi} \frac{\sin(n)}{n^2} + \frac{\pi-1}{\pi} \frac{\cos(n)}{n} + \frac{1}{\pi} \frac{\sin(n)}{n^2} = \frac{\sin(n)}{n^2}.$$

Comme g est continue partout sur \mathbb{R} alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} \sin(nx).$$

(c) Montrons l'égalité

$$\text{Pour } x = 1, \text{ on a } f(1) = g(1) \text{ et } g(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} \sin(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin(n)}{n} \right)^2 \text{ donc}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin(n)}{n} \right)^2.$$